Volumenberechnungen im $\mathbb{R}^3$
Übung

1. Berechnen Sie das Volumen des Spats, der durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c_k} = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$ so, dass der von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\overrightarrow{c_k}$ aufgespannte Spat das Volumen 6 VE besitzt.

3. Untersuchen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Spatprodukts auf lineare Unabhängigkeit.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. Ermitteln Sie mit Hilfe des Spatprodukts die lineare Unabhängigkeit der Vektoren in Abhängigkeit von den Werten $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) $\overrightarrow{a_a} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b_b} = \begin{pmatrix} b \\ b+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. Betrachtet werden im $\mathbb{R}^3$ die Punkte $A(-3; 0; 2)$, $B(-1; 2; 3)$, $D(-4; 2; 0)$ und $S(3; 3; 3)$.

   a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und D ein Quadrat ABCD festlegen. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts C.

   b) Ermitteln Sie den Volumeninhalt der vierseitigen Pyramide ABCDS.

6. Berechnen Sie das Volumen der dreiseitigen Pyramide ABCD im $\mathbb{R}^3$mit $A(1; 0; 3)$, $B(0; 1; -1)$, $C(3; 4; -2)$ und $D(4; -3; 9)$.

7. Gegeben sind die Punkte $A(0; 0; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(2; 2; 3)$ und $D_t(4; 4 - 2t; 4 + t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie t so, dass das Volumen der dreiseitigen Pyramide $ABCD_t$ genau 2 Volumeneinheiten (VE) beträgt.

8. Betrachtet wird die dreiseitige Pyramide $ABCD_k$ mit $A(1; 1; 1)$, $B(4; 3; 3)$, $C(0; -2; -1)$ und $D_k(1 - 2k; 1 + k; 7)$, wobei k ein reeller Parameter ist. Zeigen Sie, dass Volumen der Pyramide $ABCD_k$ unabhängig von $k \in \mathbb{R}$ ist und geben Sie dieses an. Interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die Lage der Punkte A, B, C und D_k.

Volumenberechnungen im $\mathbb{R}^3$
Lösung

1.
   a) $V_{Spat} = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| = 2$ Volumeneinheiten (VE)
   b) $V_{Spat} = 21$ VE
   c) $V_{Spat} = 5$ VE

2. $\left|\begin{pmatrix}-4\\4\\5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}k\\3\\2\end{pmatrix}\right| = 6;\ k_1 = 4 \vee k_2 = 7$

3. Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann linear abhängig, wenn ihr Spatprodukt $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}$ den Wert Null annimmt.

   a) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = -17$, also linear unabhängig
   b) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = 0$, linear abhängig
   c) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c} = 45$, linear unabhängig

4.
   a) Es bietet sich an, zuerst das Vektorprodukt von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu bilden.
   Es ergibt sich $\overrightarrow{a_a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 33a - 6$.
   $\overrightarrow{a_a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig für $a \neq \frac{2}{11}$ und linear abhängig für $a = \frac{2}{11}$.
   b) $(\vec{a} \times \vec{c}) \circ \overrightarrow{b_b} = 10b - 20$.
   $\vec{a}$, $\overrightarrow{b_b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig für $b \neq 2$ und linear abhängig für $b = 2$.

5.
   a) Es müssen zwei Bedingungen gezeigt werden:
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander,
   dies ist wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = -2 + 4 - 2 = 0$ der Fall.
   Außerdem müssen die Quadratseiten gleich lang sein: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$,
   wegen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 3$ LE ist auch das erfüllt.
   Es wird der Ortsvektor von C berechnet:
   Es ist $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$, damit ist $C(-2; 4; 1)$.

   b) $A_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{3} \cdot |-21| = 7$ VE.

6. $V_{ABCD} = 6$ VE

7. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}4\\4-2t\\t\end{pmatrix}, t_1 = -14, t_2 = -2$

8. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD_k} = \begin{pmatrix} -2k \\ k \\ 6 \end{pmatrix}$

$$A_{ABCD_k} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -2k \\ k \\ 6 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2k \\ k \\ 6 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |-4k + 4k - 42| = 7 \text{ VE}.$$

Die Punkte D_k liegen auf einer Geraden, die Parallel zu der von A, B und C festgelegten Ebene verläuft.